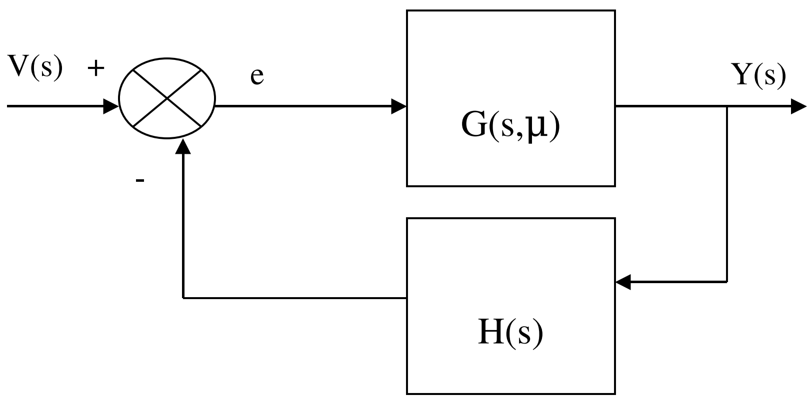
3.1 Lugar de las raíces

- Técnica desarrollada por Evans en 1948.
- Se aplica en sistemas lineales.
- Conjunto de reglas para el trazado (gráfico) de los polos de un sistema en bucle cerrado cuando varía algún parámetro de la función de transferencia (generalmente K) en bucle abierto.
- Facilita información sobre:
  - -Estabilidad y precisión del sistema.
  - -Naturaleza de la respuesta transitoria.



$$M(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s,\mu)}{1+G(s,\mu)H(s)}$$

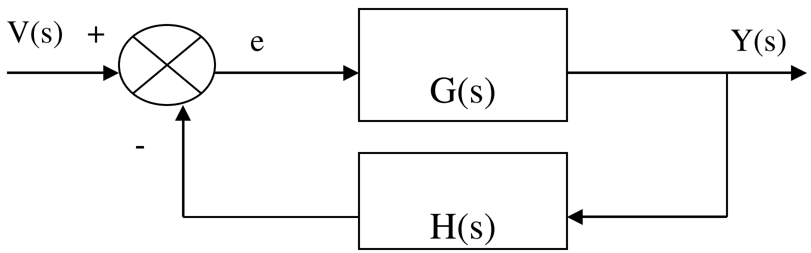
$\mu - [\quad , \quad]$

Variando K:

$$M(s) = \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)H(s)}$$

$K - [\quad , \quad]$

3.2 Criterio del módulo y del argumento



$$M(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Ecuación característica:

$$1+G(s)H(s)=0 \qquad G(s)H(S)=-1$$

$$G(s)H(s)=K\frac{Z(s)}{P(s)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

- Criterio del módulo $\left|G(s)H(S)\right|=\left|-1\right| \qquad \left|G(s)H(S)\right|=-1 \qquad \frac{|K|\prod_{i=1}^{m}|s-z|_i}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}=1$

- Criterio del argumento $\angle G(s)H(S)=\angle -1=\pi+,2\pi q \qquad \angle G(s)H(S)=\pi(1+2q)\forall q \quad Z$

$$\angle K+\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{i=1}^{n}\angle s-p_i=\pi(1+2q)\begin{cases}0<k< \quad \sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{i=1}^{n}\angle s-p_i=\pi(1+2q)\\ <k \quad 0 \quad \sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i \quad \sum_{i=1}^{n}\angle s-p_i \quad 2\pi q\end{cases}$$

3.3 Reglas para el trazado del LDR

- 1ª Regla. Número de ramas
  El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en bucle abierto
- 2ª Regla. Puntos de comienzo y final de las ramas
  Comienzan en un polo y terminan en un cero (ambos de la función de transferencia en bucle abierto G(s)H(s)). Si el número de ceros es menor que el de polos, habrá un número de ceros en el infinito igual a la diferencia entre polos y ceros. (n-m)
- 3ª Regla. Comportamiento en el eje real
  Un punto sobre el eje real pertenece al ldr si el número de polos y ceros situados a la derecha es impar, sin contar los polos o ceros conjugados. Para el ldr inverso ha de ser un número par
- 4ª Regla. Simetría del lugar de las raíces
  Tanto el ldr directo como el inverso son simétricos respecto al eje real.
- 5ª Regla. Asíntotas del lugar de las raíces
  Las ramas del ldr que terminan en el infinito son asintóticas para valores grandes de *s* a rectas cuyos ángulos vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{n-m} \quad K > 0 \text{ (directo)} \qquad \theta_a = \frac{2\pi q}{n-m} \quad K < 0 \text{ (inverso)}$$

Siendo q=0,1..n-m-1

3.4 Reglas para el trazado del LDR

- 6ª Regla. Intersección de las asíntotas (centroide)
  Cortan con el eje real a una distancia $-\tau_o$ del origen dada por:

$$-\tau_o = \frac{\quad p_i - \quad z_i}{n-m}$$

- 7ª Regla. Ángulo de salida de polos complejos y de llegada a ceros complejos
  Se hallan aplicando el criterio del argumento

$$Si\ \ K>0 \quad \theta_{sp} = \quad \theta_z - \quad \theta_p - (2q+1)\pi; \quad \theta_{ez} = \quad \theta_p - \quad \theta_z + (2q+1)\pi;$$

$$Si\ \ K<0 \quad \theta_{sp} = \quad \theta_z - \quad \theta_p - 2\pi q; \quad \theta_{ez} = \quad \theta_p - \quad \theta_z + 2\pi q \qquad q = \{0,1,2,3...\}$$

- 8ª Regla. Puntos de confluencia y dispersión de ramas.
  Puntos donde la ganancia presenta máximos o mínimos relativos. Son las raíces de:

$$K = f(s) \qquad \frac{dk}{ds} = 0 \qquad {}_{i=1}^{n} \frac{1}{s-p_i} = {}_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i}$$

- 9ª Regla. Intersección con el eje imaginario
  Se puede hallar aplicando el criterio de Routh

$$|K| = \frac{{}_{i=1}^{m} (s_e - p_i)}{{}_{i=1}^{n} (s_e - z_i)}$$

- <u>10ª Regla</u>. Valor de ganancia en un punto
  Se calcula aplicando el criterio del módulo

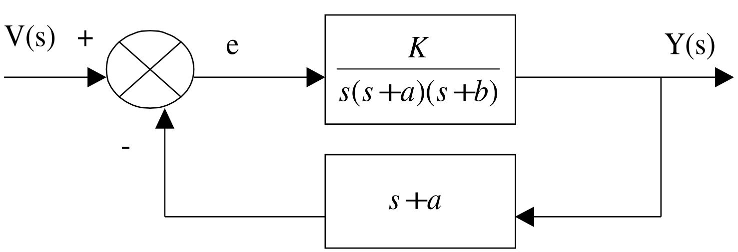
$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s_e - p_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s_e - z_i)}$$

- <u>11ª Regla</u>. Regla de la suma
  Cuando el coeficiente del término mayor es 1, la suma (negada) de las raíces es igual al coefiente del segundo término mayor.

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_o = 0$$

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} p_i$$

- Efecto de las cancelaciones



$$1 + G(s)H(s) = 0 \qquad 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+a)(s+b)} = 0 \qquad 1 + \frac{K}{s(s+b)} = 0$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(s+a)(s+b)}}{1 + \dfrac{K(s+a)}{s(s+a)(s+b)}} = \frac{K}{(s+a)[s(s+b)+k]}$$